סדנת קיץ אודיסאה תשפ"ג - שיעור שישי

בן בסקין

הגדרות ודוגמאות

- **פולינום** במשתנה x הוא ביטוי מהצורה $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, כאשר $a_n,\ldots,a_0$ הם קבועים ו־$n\in\mathbb{N}$.
  הקבועים $a_n,\ldots,a_0$ נקראים מקדמים.
  a_0 נקרא **המקדם החופשי**.
  נניח ש־$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ הוא פולינום, ו־$a_n\neq 0$. a_n נקרא **המקדם המוביל**.
  ל־n נקרא **דרגת הפולינום**, המסומנת בתור $\deg f$. אם $a_n=1$, הפולינום נקרא **מתוקן**.
- דוגמאות לפולינומים. מהו המדם המוביל? מהו המקדם החופשי? מהי דרגת הפולינום? האם הוא מתוקן?
  - $f(x)=x$
  - $f(x)=\pi$
  - $f(x)=0$
  - $f(x)=ax^2+bx+c$
  - $f(x)=2024x^{2023}-2023x^{2024}$
- **__טענה:__** מכפלה, סכום והרכבה של פולינומים היא פולינום.
- טענות על דרגות:
  - $\deg(f\cdot g)=\deg f+\deg g$
  - $\deg(f+g)\leq\max\{\deg f,\deg g\}$.
  - אם g אינו פולינום קבוע, אז $\deg(f\circ g)=\deg f\cdot\deg g$.
  - כאשר g פולינום קבוע, $\deg(f\circ g)$ יכול להיות 0 ויכול להיות $-\infty$.
- **__הגדרה:__** מספר ממשי x_0 נקרא **שורש** של פולינום f, אם $f(x_0)=0$.
  לדוגמה, אם $a\neq 0$, ו־$f(x)=ax^2+bx+c$ אז שורשי הפולינום (אם הם קיימים) הם

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

__הוכחה:__ נחלק ב־a ונבצע השלמה לריבוע:

$$ax^2+bx+c=0\backslash:a$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\Rightarrow$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=$$

$$=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\overset{*}{=}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2$$

את השוויון האחרון ניתן לעשות רק אם $b^2-4ac\geq 0$, או אם עובדים עם מספרים לא ממשיים.
נמשיך על ידי שימוש בהפרש ריבועים:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2=\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0$$

לכן, השורשים הם

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

- יהיו f,g פולינומים. נאמר ש־g **מחלק** את f אם קיים פולינום q כך ש־$f=qg$.
- **משפט** (חלוקה עם שארית של פולינומים): יהיו f,g פולינומים, $g\neq 0$. אזי קיימים q,r פולינומים יחידים, כך ש־$f=qg+r$ כך ש־$\deg r<\deg g$.

תרגילים:

1. יהיו $f(x)=x^2+2x-5,\ g(x)=-x^2-x$. מצאו את הפולינומים הבאים. מהם הדרגות, המקדמים המובילים והמקדמים החופשיים שלהם? האם הם מתוקנים?

   (א) $f+g$

   (ב) $f\cdot g$

   (ג) $f\circ g$

   (ד) $g\circ f$

2. f הוא פולינום, שהוא גם פונקציה אי־זוגית. הוכיחו שהמקדם החופשי שלו הוא 0.

3. בכל אחד מהסעיפים הבאים, חלקו את f ב־g עם שארית:

   (א) $f(x)=x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$, $g(x)=x-1$.

   (ב) $f(x)=x^7-x^6-65$, $g(x)=x-2$.

   (ג) $f(x)=3x^7+7x^6+2x^5-x^3-x^2+2$, $g(x)=-x^3+x^2+3$.

4. בכל אחד מהסעיפים הבאים n הוא מספר טבעי. בנוסף נתון שהביטויים הם מספרים שלמים. מצאו את כל האפשרויות ל־n בכל אחד מהסעיפים:

(א) $\frac{2n-1}{n+2}$

(ב) $\frac{n^3-2n+1}{n-1}$

(ג) אתגר: $\frac{2n^3-n+3}{3n+4}$

5. אתגר: הוכיחו שלפולינום הבא אין שורשים רציונליים: $f\left(x\right)=x^3-3x+1$.

6. אתגר: p,q מספר שלמים אי־זוגיים. הוכיחו שלמשוואה הבאה אין פתרונות שלמים: $x^{10}+px^9+q=0$.