תרגיל 3 - פתרון

1. יהי $n$ טבעי המקיים $3|n^{2}$. הראו כי $3|n$.

פתרון:

3 ראשוני ו-$3|n∙n$. מהלמה של אוקלידס, $3|n$ או $3|n$. בכל מקרה $3|n$.

1. הסיקו משאלה 1 כי $\sqrt{3}$ אי רציונלי.

פתרון:

נחקה את ההוכחה ש-$\sqrt{2}$ אי רציונלי. נניח בשלילה כי $\sqrt{3}$ אי רציונלי. אז קיימים $m,n$ *שלמים כך ש-*$n$ *שונה מ-0, המקיימים* $\sqrt{3}=\frac{m}{n}$*. נקבל*

$$3=\frac{m^{2}}{n^{2}}$$

$$m^{2}=3n^{2}$$

$$3|m^{2}$$

*ומשאלה 1 נקבל* $3|m$*. לכן קיים* $k$ *שלם המקיים* $3k=m$*. אז*

$$m^{2}=3n^{2}$$

$$9k^{2}=3n^{2}$$

$$n^{2}=3k^{2}$$

$$3|n^{2}$$

*ומשאלה 1 נקבל* $3|n$*. המונה ומהכנה מתחלקים ב-3 ולכן השבר אינו מצוצמם, סתירה.*

1. יהי $n$ אי זוגי. הראו כי קיים $k$ שלם המקיים $n^{2}=8k+1$.

פתרון:

נניח כי $n$ *אי זוגי. אז קיים* $k$ *שלם המקיים* $n=2k+1$*. מכאן*

$$n^{2}=\left(2k+1\right)\left(2k+1\right)=2k2k+2k+2k+1=$$

$$4k^{2}+4k+1=4k\left(k+1\right)+1$$

טענת עזר:

המספר $k\left(k+1\right)$ זוגי. הוכחה:

נפריד למקרים:

אם $k$ *זוגי, קיים* $s$ *שלם המקיים* $2s=k$*. אז* $k\left(k+1\right)=2s\left(k+1\right)=2∙שלם$ *ולכן* $k\left(k+1\right)$ *זוגי.* אם $k$ *אי זוגי, קיים* $s$ *שלם המקיים* $2s+1=k$*. אז* $k\left(k+1\right)=k\left(2s+1+1\right)=2k\left(s+1\right)=2∙שלם$ *ולכן* $k\left(k+1\right)$ *זוגי.*

*בכל מקרה קיים* $t$ *שלם המקיים* $2t=k\left(k+1\right)$*. לכן*

$$n^{2}=4k\left(k+1\right)+1=8t+1$$

*כנדרש.*

1. יהיו $a,b,c,d$ שלמים. הוכיחו או הפריכו:
2. אם $a|b,c|d$ אז $ac|bd$.

הטענה נכונה: מהגדרה, קיימים $e,f$ *שלמים המקיימים* $ae=b,cf=d$*.*

נבחר $k=ef$. זה שלם מסגירות שלמים לכפל. מתקיים

$$ack=acef=aecf=cd$$

*ולכן* $ac|bd$*.*

1. אם $a|b,c|d$ אז $a+c|b+d$.

הטענה אינה נכונה:

ראינו בכיתה כי $1|1,1|0$, אבל $1+1$ אינו מחלק את $1$ כי $1$ אינו מתחלק ב-$2$.