22.5.24

<u>עקרון ההכלה וההפרדה/הדחה</u>

ראינו שלפי עקרון החיבור, אם A, B קבוצות סופיות וזרות, אז $|A \cup B| = |A| + |B|$. אבל מהו גודלה של הקבוצה $|A \cup B|$ כאשר הקבוצות A, B **אינן** זרות?

עבור 2 קבוצות: אם A, B קבוצות סופיות (לאו דווקא זרות) נקבל

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

עבור 3 קבוצות (לא לבוחן): אם A, B, C קבוצות סופיות (לאו דווקא זרות) נקבל

$$|A \cup B| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

<u>דוגמאות</u>

1. בתכנית באוניברסיטה לומדים סטודנטים היסטוריה ומדעים.
נתון –
85 סטודנטים לומדים גם היסטוריה וגם מדעים.
106 סטודנטים לומדים היסטוריה.
109 סטודנטים לומדים מדעים.
כמה סטודנטים יש בתכנית?

<u>תשובה</u>:
נסמן ב- A את קבוצת הסטודנטים שלומדים היסטוריה,
וב-B את קבוצת הסטודנטים שלומדים מדעים.
אז $A \cup B$ זו קבוצת כל הסטודנטים בתכנית,
ו- $A \cap B$ זו קבוצת הסטודנטים שלומדים גם היסטוריה וגם מדעים.
נשים לב - $|A| = 106,\ \ |B| = 109,\ \ |A \cap B| = 85$
לכן לפי עקרון ההכלה וההפרדה מתקיים –

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 106 + 109 - 85 = 130$$

כלומר, לומדים בתכנית 130 סטודנטים.

2. הגדרה (שלא צריך לזכור): <u>ביט</u> – ספרה 0 או 1.
<u>בייט</u> – סדרה של 8 ביטים (קוראים משמאל לימין) (למשל 01101110)

כמה בייטים שונים ניתן לכתוב שמתחילים ב-1 <u>או</u> מסתיימים ב-00?

<u>תשובה</u>:

נסמן ב- A את קבוצת ההבייטים שמתחילים ב-1,
וב-B את קבוצת הבייטים שמסתיימים ב-00.
אז $A \cup B$ זו קבוצת כל הבייטים שמתחילים ב-1 <u>או</u> מסתיימים ב-00,
ו- $A \cap B$ זו קבוצת הבייטים שמתחילים ב-1 <u>וגם</u> מסתיימים ב-00.

נחשב - $|A|$: יש 8 ספרות (ביטים), לספרה הראשונה יש רק אפשרות אחת (חייב להתחיל ב-1) ולכל שאר הספרות יש 2 אפשרויות (0 או 1), לכן לפי עקרון הכפל נקבל –
$|A| = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$
נחשב - $|B|$: יש 8 ספרות (ביטים), ל-2 הספרות האחרונות יש רק אפשרות אחת
(חייב להסתיים ב-00) ולכל שאר הספרות יש 2 אפשרויות (0 או 1), לכן לפי עקרון הכפל נקבל –
$|B| = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2^6$

נחשב - $|A \cap B|$: יש 8 ספרות (ביטים), לספרה הראשונה וגם ל-2 הספרות האחרונות יש רק אפשרות אחת (חייב להתחיל ב-1 וגם להסתיים ב-00) ולכל שאר הספרות יש 2 אפשרויות (0 או 1), לכן לפי עקרון הכפל נקבל –

$$|A \cap B| = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2^5$$

לכן לפי עקרון ההכלה וההפרדה מתקיים –

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 2^7 + 2^6 - 2^5 = 160$$

כלומר, אפשר לכתוב 160 בייטים שונים המתחילים ב1 <u>או</u> מסתיימים ב-00.

<u>תרגיל כיתה</u>

1. קבוצת תלמידות לומדות צרפתית וסינית.
32 מהן לומדות צרפתית, 15 מהן לומדות סינית, ו-7 מהן לומדות את שתי השפות.
כמה תלמידות יש בקבוצה?
2. בעזרת הספרות 0-9 (כולל), כמה מספרים בעלי 2 ספרות (ניתן לשים 0 בספרת העשרות) ניתן לכתוב כך שלפחות אחת מבין הספרות 0-4 מופיעות בהם?

הדרכה: סמנו ב-A את קבוצת המספרים בעלי 2 ספרות שספרת העשרות שלהם היא בין 0-4, וב-B את קבוצת המספרים בעלי 2 ספרות שספרת היחידות שלהם היא בין 0-4. המשיכו כמו בדוגמאות.

<u>פתרון ל-2</u>

נסמן ב-A את קבוצת המספרים בעלי 2 ספרות שספרת העשרות שלהם היא בין 0-4, וב-B את קבוצת המספרים בעלי 2 ספרות שספרת היחידות שלהם היא בין 0-4.

אז $A \cup B$ זו קבוצת המספרים בעלי 2 ספרות ש<u>לפחות אחת</u> מבין הספרות 0-4 מופיעות בהם,

ו- $A \cap B$ זו קבוצת המספרים בעלי 2 ספרות, כך ש<u>שתי הספרות</u> הן מבין הספרות 0-4..

נחשב - $|A|$: יש 5 אפשרויות לספרת העשרות (0,1,2,3,4), ו-10 אפשרויות לספרת היחידות (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9), לכן לפי עקרון הכפל נקבל שיש בקבוצה $5 \cdot 10 = 50$ איברים.

נחשב - $|B|$: יש 10 אפשרויות לספרת העשרות ו-5 אפשרויות לספרת היחידות, לכן לפי עקרון הכפל נקבל שיש בקבוצה $10 \cdot 5 = 50$ איברים.

נחשב - $|A \cap B|$: יש 5 אפשרויות לספרת העשרות ו-5 אפשרויות לספרת היחידות, לכן לפי עקרון הכפל נקבל שיש בקבוצה $5 \cdot 5 = 25$ איברים.

כעת, לפי עקרון ההכלה וההדחה, נקבל -

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 50 + 50\text{-}25 = 75$$

כלומר, יש 75 מספרים כך שלפחות אחת מבין הספרות 0-4 מופיעות בהם.